УДК 517.51

УЗАГАЛЬНЕНА ГЕНЕРАТРИСА БЕЗ'Є

Ю.І. Волков

В этой статье рассматриваются свойства обобщенного преобразования Безье , его применение для приближения функций и построения кривых.

In this paper we consider properties of generalized Bezer's transformation, its using for the approximation of functions and curves tracing.

1. Вступ

Позначатимемо: через $\{y\}$ (або просто y) числову послідовність $\{y_0,\ldots,y_{2n}\}$;

$$b=b(x,a):=\left(1-\frac{2a(1-x)}{a+\sqrt{1+(a^2-1)(2x-1)^2}}\right),0\le x\le 1.a>0;$$

$$C(n,k,a):=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(1+2az+z^2)^n\Big|_{z=0}=\sum_{i+2j=k}\frac{n!(2a)^i}{i!(n-i-j)!},k=0,1,\ldots,2n.$$

Означення 1. *Функція*

$$B_n(y,x,a):=\sum_{k=0}^{n}y_kC(n,k,a)b(x,a)^{k/2}b(1-x,a)^{n-k/2}$$

називається узагальненою генератрисою Без'є послідовності $\{y\}$.

Зокрема, якщо a=1, то

$$C(n,k,1)=C_{2n}^k,B_n(y,x,1)=B_{2n}(y,x)=\sum_{k=0}^{n}y_kC_{2n}^kx^k(1-x)^{2n-k},$$

тобто, $B_n(y,x,1)$ це звичайна функція Без'є, яка породжена послідовністю $\{y\}$ (див., наприклад, [1], стор. 44-62); якщо a=0, то

$$C(n,k,0)=\begin{cases}0,\text{якщо}\quad k\ \text{непарне}\\ C_{n-k/2},\text{якщо}\quad k\ \text{парне},\end{cases}$$

а $B_n(y,x,0)$ це звичайна функція Без'є, яка породжена послідовністю $\{y\}=\{y_0,\ldots,y_{2n}\}$.

Метою даної роботи є вивчення функцій $B_n(y,x,a)$ та їхніх застосувань для апроксимації неперервних функцій і побудови кривих.

1. Допоміжні пропозиції.

Лема 1. *Числа $C(n,k,a)$ задовольняють рекурентному співвідношенню*: $C(n,k,a)=C(n-1,k,a)+2aC(n-1,k-1,a)+C(n-1,k-2,a)$, $C(0,0,a)=1$, $C(0,k,a)=1$, $C(1,1,a)=2a$, $C(2,1,a)=1$.

Лема випливає з співвідношення
$(1+2az+z^2)^n=(1+2az+z^2)^{n-1}(1+2az+z^2)$, бо $C(n,k,a)$ це коефіцієнти многочлена $(1+2az+z^2)^n=\sum_{k=0}^{2n} C(n,k,a)z^k$.

Таблиця чисел $C(n,k,a)$ для n=1, 2, 3, 4.

1	$2a$	1						
1	$4a$	$2+4a^2$	$4a$	1				
1	$6a$	$3+12a^2$	$12a+8a^3$	$3+12a^2$	$6a$	1		
1	$8a$	$4+24a^2$	$24a+32a^3$	$6+48a^2+16a^4$	$24a+32a^3$	$4+24a^2$	$8a$	1

Далі використовуватимемо таке позначення:

$$w=w(x,a):=\sqrt{1+(a^2-1)(1-2x)^2}=\sqrt{4x(1-x)+a^2(1-2x)^2}.$$

Лема 2. *Функція $b(x,a)$, її перша і друга похідні по x невід'ємні і* $b(x,a)\le 1, 0\le x\le 1, a\ge 0$.

Дійсно,

$$b'(x,a)=\frac{w(x,a)+a(2x-1)}{w(x,a)}\ge\frac{a|2x-1|+a(2x-1)}{w(x,a)}\ge 0.$$

Тому функція $b(x,a)$ не спадає, а через те, що $b(0,a)=0$, $b(1,a)=1$, то $0\le b(x,a)\le 1$.

Далі,

$$b''(x,a)=2a(w(x,a))^{-3}\ge 0, \qquad (1)$$

тому функція $b'(x,a)$ не спадає, а через те, що

$b'(0,a)=0, b'(1,a)=2$, то $0\le b'(x,a)\le 2$.

Лема 3. Має місце подання

$$B_n(y,x,a)=b(1-x,a)^n\sum_{k=0}^{2n} y_k C(n,k,a)a^k\left(\frac{b(x,a)}{x-b(x,a)}\right)^k \qquad (2)$$

Випливає з означення функції $b(x,a)$.

З (2) слідує, що операція переходу від послідовності {y} до функції $B_n(y,x,a)$ лінійна і додатня.

Нехай E - оператор зсуву, I - одиничний оператор, Δ - різницевий оператор. Тоді $E^k y_0=y_k, Iy_k=y_k, \Delta^k y_0=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i y_i, k=0,1,\ldots$

Лема 4. *Мають місце подання*

$$B_n(y,x,a)=(b(1-x,a)+2(x-b(x,a))E+b(x,a)E^2)^n y_0, \qquad (3)$$

$$B_n(y,x,a) = (1 + 2x\Delta + b(x,a)\Delta^2)^n y_0 =$$

$$\sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!}(2x)^i (b(x,a))^j \Delta^{i+2j} y_0. \tag{4}$$

Доведення. Справді,

$$B_n(y,x,a) = (b(1-x,a) + 2(x - b(x,a))E + b(x,a)E^2)^n y_0$$

$$= \sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!} b(1-x,a)^{n-i-j} 2^i (x - b(x,a))^i b(x,a)^j E^i E^{2j} y_0$$

$$= \sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!} b(1-x,a)^n (2a)^i \left(\frac{a}{x - b(x,a)} \right)^{i+2j} b(x,a)^{i+2j} y_{i+2j}$$

$$= b(1-x,a)^n \sum_{k=0}^{2n} y_k C(n,k,a) a^k \left(\frac{b(x,a)}{x - b(x,a)} \right)^k = B_n(y,x,a).$$

Співвідношення (4) випливає з (1), якщо врахувати , що $E = \Delta + I$.

Наслідок 1. *Нехай* $y_k^{(0)} = y_k, k = 0,1,\ldots,2n;$
$y_k^{(m)} = y_k^{(m-1)} + 2x\Delta y_k^{(m-1)} + b(x,a)\Delta^2 y_k^{(m-1)}, m = 1,2,\ldots,n, k = 0,1,\ldots,2(n-m).$
Тоді

$$B_n(y,x,a) = B_{n-m}(y^{(m)},x,a),$$

де

$$\{y^{(m)}\} = \{y_0^{(m)}, y_1^{(m)}, \ldots, y_{2(n-m)}^{(m)}\}.$$

Дійсно, з (4) випливає

$$B_n(y,x,a) = (1 + 2x\Delta + b(x,a)\Delta^2)^{n-m}((1 + 2x\Delta + b(x,a)\Delta^2)^m y_0),$$

а звідси випливає наслідок.

Лема 5. *Нехай* $\{y\} = \{0^m, 1^m, \ldots, (2n)^m\}, m \in N.$ *Тоді*

$$B_n(y,x,a) = \sum_{k=0}^{m} k!\,S(m,k) \sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!}(2x)^i b(x,a)^j, \tag{5}$$

де $S(m,k)$ *числа Стірлінга другого роду.*

Дійсно,

$$B_n(y,x,a) = (1 + 2x\Delta + b(x,a)\Delta^2)^n 0^m$$

$$= \sum_{0 \le i+j \le n} \frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!}(2x)^i b(x,a)^j \Delta^{i+2j} 0^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \Delta^k 0^m \sum_{0 i+2j=k} \frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!}(2x)^i b(x,a)^j,$$

а звідси випливає (5), бо $S(m,k) = \Delta^k 0^m / k!$.

Наслідок 2. *Нехай* $\{y\}=\{1,1,\ldots,1\}$. *Тоді* $B_n(y,x,a)=1$.

Наслідок 3. *Нехай* $\{y\}=\{0,1,2,\ldots,(2n)\}$. *Тоді* $B_n(y,x,a)=2nx$. (6)

Наслідок 4. *Нехай* $\{y\}=\{0^2,1^2,2^2,\ldots,(2n)^2\}$. *Тоді*

$$B_n(y,x,a)=2nx+4n(n-1)x^2+2nb(x,a). \quad (7)$$

Наслідок 5. *Нехай* $\{y\}=\{0^3,1^3,2^3,\ldots,(2n)^3\}$. *Тоді*

$$B_n(y,x,a)=2nx+12n(n-1)x^2+6nb(x,a)+8n(n-1)(n-2)x^3+12n(n-1)b(x,a).$$

2. Властивості узагальненої генератриси Без'є

Теорема 1. *Якщо послідовність* $\{y\}=\{y_0,y_1,\ldots,y_{2n}\}$ *не спадає (не зростає), то функція* $B_n(y,x,a)$ *не спадає (не зростає).*

Доведення. Нехай $\{\tilde{y}\}=\{\tilde{y}_0,\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_{2n}\}$, де

$$\tilde{y}_k=(2\Delta+b'(x,a)\Delta^2)y_k=b'(1-x,a)\Delta y_k+b'(x,a)\Delta y_{k+1},k=0,1,\ldots,2n-2.$$

Скористаємося (4) та (3). Отримаємо

$$\frac{d}{dx}B_n(y,x,a)=n(1+2x\Delta+b(x,a)\Delta^2)^{n-1}(2\Delta+b'(x,a)\Delta^2)y_0=B_{n-1}(\tilde{y},x,a)\ge 0(\le 0),$$ б

о $b'(x,a)\ge 0$ і $2-b'(x,a)=1-a(2x-1)w^{-1}\ge 0$, а послідовність $\{y\}$ не спадає (не зростає).

Теорема 2. *Якщо послідовність* $\{y\}=\{y_0,y_1,\ldots,y_{2n}\}$ *опукла, то функція* $B_n(y,x,a)$ *опукла.*

Доведення. Нехай $\{\hat{y}\}=\{\hat{y}_0,\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_{2n-4}\}$, де

$$\hat{y}_k=(2\Delta+b'(x,a)\Delta^2)^2y_k=b'(x,a)^2\Delta^2y_{k+2}+2b'(x,a)(2-b'(x,a))\Delta^2y_{k+1}+$$

$$(2-b'(x,a))^2\Delta^2y_k,k=0,1,\ldots,2n-2,$$

а $\{\bar{y}\}=\{\bar{y}_0,\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_{2n-2}\}$, де

$$\bar{y}_k=b''(x,a)(1+2x\Delta+b(x,a)\Delta^2y_k=b(1-x,a)\Delta^2y_k+2(x-b(x,a))\Delta^2y_{k+1}$$

$$+b(x,a)\Delta^2y_k,k=0,1,\ldots,2n-4.$$

Скористаємося (4) і (3). Отримаємо:

$$\frac{d^2}{dx^2}B_n(y,x,a)=n(n-1)(1+2x\Delta+b(x,a)\Delta^2)^{n-2}(2\Delta+b'(x,a)\Delta^2)^2y_0+$$

$$nb''(x,a)(1+2x\Delta+b(x,a)\Delta^2)^{n-1}\Delta y_0=n(n-1)B_{n-2}(\hat{y},x,a)+nB_{n-1}(\bar{y},x,a)\ge 0,$$

бо $b''(x,a)\ge 0$ (див. (1)), $(2-b'(x,a))\ge 0,(1-2x+b)\ge 0,(x-b(x,a))\ge 0,$ а послідовність $\{y\}$ опукла.

Теорема 3. *Нехай* $t=\{0,1,\ldots,2n\}$. *Тоді*

$$(x(1-2x)+b(x,a))\frac{d}{dx}B_n(y,x,a)=B_n((t-2nx)y,x,a). \quad (8)$$

Доведення. Маємо:

$$\frac{d}{dx}B_n(y,x,a):=\sum_{k=0}^{n}y_kC(n,k,a)b(x,a)^{k/2-1}b(1-x,a)^{n-k/2-1}$$

$$\cdot\left(\frac{k}{2}(b'(x,a)b(1-x,a)+b(x,a)b'(1-x,a)\right)-nb(x,a)b'(1-x,a),$$

$$=\sum_{k=0}^{n}y_kC(n,k,a)b(x,a)^{k/2-1}b(1-x,a)^{n-k/2-1}\frac{2x(1-x)}{w(x,a)(a+w(x,a))}(k-2nx),$$

а звідси випливає співвідношення (8), бо

$$\frac{2x(1-x)}{w(x,a)(a+w(x,a)}=\frac{x(1-2x)+b(x,a)}{w^2(x,a)}.$$

3. Апроксимаційні властивості

Візьмемо в якості членів послідовності $\{y\}$ значення функції $f(x)$, яка визначена і неперервна на проміжку [0,1]:

$$\{f(0),f(\frac{1}{2n}),\ldots,f(\frac{k}{2n}),\ldots,f(1)\}.$$

Тоді послідовність функцій $B_n(y,x,a)$ рівномірно збігається до функції $f(x)$ на проміжку [0,1]. Цей результат є наслідком того, що додатні лінійні оператори $B_n(y,x,a)$, в силу теореми 3, задовольняють співвідношенню:

$$B_n((\cdot-x)f(\cdot),x,a)=\frac{v(x,a)}{2n}\frac{d}{dx}B_n(f(\cdot),x,a),$$

де $v(x,a)=x(1-2x)+b(x,a)$, а тому оператори належать до класу ***B*** (див.[2]), і, отже, результати цієї роботи можна застосувати й до операторів $B_n(y,x,a)$.

Якщо a=0, то $B_n(y,x,0)=B_n(f,x)$ – звичайні многочлени Бернштейна функції $f(2t)$, а якщо a=1, то це многочлени Бернштейна $B_{2n}(f,x)$.

Теорема 4. *Нехай функція f неперервна на проміжку* [0,1] *і її модуль непервності* $\omega(\delta)$ *опуклий* (*вгору*). *Тоді*

$$\left|B_n(f,x,a)-f(x)\right|\le\omega\left(\sqrt{\frac{v(x,a)}{2n}}\right).$$

Доведення.

$$\left|B_n(f,x,a)-f(x)\right|\le\sum_{k=0}^{2n}\left|f\left(\frac{k}{2n}\right)-f(x)\right|C(n,k,a)b(x,a)^{k/2}b(1-x,a)^{n-k/2}$$

$$\le\sum_{k=0}^{2n}\omega\left(\left|\frac{k}{2n}-x\right|\right)C(n,k,a)b(x,a)^{k/2}b(1-x,a)^{n-k/2}$$

$$\le \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{k}{2n}-x\right)^2 C(n,k,a)b(x,a)^{k/2}b(1-x,a)^{n-k/2}\right)^{1/2}\right)=\omega\left(\sqrt{\frac{v(x,a)}{2n}}\right).$$

Наслідок 6. *Для всякого x з проміжку* [0,1]

$$|B_n(f,x,a)-f(x)|\le \omega\left(\frac{1}{2\sqrt{(a+1)n}}\right),\ \textit{якщо}\ 0\le a\le 2,$$

$$|B_n(f,x,a)-f(x)|\le \omega\left(\frac{a}{2\sqrt{(a^2-1)n}}\right),\ \textit{якщо}\ a>2.$$

Дійсно,

$$\frac{d}{dx}v(x,a)=(1-2x)\left(2-\frac{a}{\sqrt{1+(a^2-1)(2x-1)^2}}\right),$$

а звідси випливає: якщо $0\le a\le 2$, то найбільше значення функції $v(x,a)$ досягається в точці x=0,5; якщо a>2, то найбільше значення функції досягається в точках $0{,}5\pm 0{,}25\sqrt{(a^2-4)(a^2-1)}$.

Наслідок 6. *Нехай виконуються умови теореми* 4. *Тоді*

$$|B_n(f,x,a)-f(x)|\le \omega\left(\sqrt{\frac{2x(1-x)}{n}\left(\frac{|2x-1|}{1+|2x-1|}+\frac{1}{a}\right)}\right).$$

Доведення. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial a}v(x,a)=-\frac{8x^2(1-x)^2}{w(a+w)^2}\le 0,$$

то при кожному фіксованому x функція $v(x,a)$, як функція від a, спадає і

$$\lim_{a\to\infty}v(x,a)=\frac{2x(1-x)|2x-1|}{1+|2x-1|}.$$

Тому

$$v(x,a)=$$

$$2x(1-x)\left(\frac{|2x-1|}{1+|2x-1|}+\left(\frac{w}{a+w}-\frac{|2x-1|}{1+|2x-1|}\right)\right)\le 2x(1-x)\left(\frac{|2x-1|}{1+|2x-1|}+\frac{1}{a}\right).$$

Звернемо увагу на те, що похибка наближення зменшується не тільки біля кінців проміжку [0,1] (як у випадку многочленів Бернштейна), але і в околі середини проміжка при збільшенні параметра a.

Для отримання точних оцінок порядку наближення функцій операторами $B_n(f,x,a)$ у випадку довільного модуля неперервності скористаємося результатами Сіккеми з роботи [3](стор.74-75). Після відповідних обчислень отримаємо такий результат.

Теорема 5. *Нехай* $\omega(\delta)$ *модуль неперервності функції* $f(x)$. *Тоді*

$$\left|B_n(f,x,a)-f(x)\right|\le$$

$$\left(1+\sum_{k=0}^{2n}\left[\sqrt{2n}\left|\frac{k}{2n}-x\right|\right]C(n,k,a)b(x,a)^{k/2}b(1-x,a)^{n-k/2}\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\le K(a)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$

де

$$K(a)=1+\begin{cases}K1(a),\ \text{якщо}\ a_1\le a\le a_2\\ K2(a),\ \text{якщо}\ 0\le a\le a_1\ \text{або}\ a\ge a_2\end{cases},$$

$$K1(a)=b\left(\frac{5-\sqrt6}{6},a\right)^3+6a\sqrt{b\left(\frac{5-\sqrt6}{6},a\right)^5 b\left(\frac{1+\sqrt6}{6},a\right)}+b\left(\frac{1+\sqrt6}{6},a\right)^3,$$

$$K2(a)=b\left(\frac{\sqrt6}{6},a\right)^3+6a\sqrt{b\left(\frac{\sqrt6}{6},a\right)^5 b\left(\frac{6-\sqrt6}{6},a\right)}+b\left(\frac{6-\sqrt6}{6},a\right)^3,$$

a_1=0.319483292…, a_2=2.147963138… *корені рівняння* $K1(a)=K2(a)$.

Зокрема, якщо a=1, то отримаємо константу Сіккеми ([3], стор.63)

$$\kappa=1+K1(1)=\frac{4306+837\sqrt6}{5832}=1.089887331\ldots$$

Якщо функція диференційовна на проміжку [0,1], то має місце таке твердження.

Теорема 6. *Нехай* $\omega_1(\delta)$ *модуль неперервності функції* $f'(x)$. *Тоді*

$$\left|B_n(f,x,a)-f(x)\right|\le c_n(x,a)\omega_1(x),$$

де

$$c_n(x,a)=\frac12x(1-2x)+\frac12b(x,a)+\frac{1}{2n}(2nx-[2nx])(1-2nx+[2nx]).$$

Крім того,

$$\max_{0\le x\le1}c_n(x,a)=\frac12b\left(\frac12+t,a\right)+\frac12t-(2n+1)t^2,$$

де t єдиний дійсний корінь рівняння

$$1+\frac{at}{\sqrt{1+4(a^2-1)t^2}}=2(1+2n)t\,.$$

А звідси

$$\max_{0\le x\le1}c_n(x,a)\le\frac{1}{4(a+1)}+\frac{1}{8n},\ \text{якщо}\ 0\le a\le2,$$

$$\max_{0\le x\le1}c_n(x,a)\le\frac{a^2}{16(a^2-1)}+\frac{1}{8n},\ \text{якщо}\ \ a>2\,.$$

Таблиця значень $\max\limits_{0\le x\le 1} c_n(x,a)$

$n \backslash a$	1	2	3	4	5
1	0.225000	0.201106	0.194045	0.191281	0.189949
2	0.180556	0.145188	0.130633	0.123699	0.120005
3	0.163462	0.124863	0.107267	0.097953	0.092575
4	0.154412	0.114539	0.095617	0.085076	0.078666
5	0.148810	0.108315	0.088729	0.077524	0.070505
6	0.145000	0.104158	0.084198	0.072609	0.065208
7	0.142241	0.101186	0.080997	0.069168	0.061527
8	0.140152	0.098955	0.078616	0.066631	0.058829
9	0.138514	0.097220	0.076778	0.064684	0.056770
10	0.137195	0.095832	0.075315	0.063143	0.055149

Випишемо ще одне твердження, як частинний випадок більш загального, яке було отримано в [2] (стор. 668, співвідношення (31)).

Теорема 7. *Нехай функція f має неперервні похідні до $(m+2)$–го порядку включно. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{d^m}{dx^m}B_n(f,x,a)-f^{(m)}(x)\right)=\frac{1}{2}\frac{d^m}{dx^m}(f''(x)v(x,a)).$$

4. Узагальнені криві Без'є

Означення 2. *Нехай*

$$\{A\}=\{A_0(x_0,y_0,z_0),A_1(x_1,y_1,z_1),\dots,A_{2n}(x_{2n},y_{2n},z_{2n})\}$$

множиа контрольних точок у просторі, $\{x\}$ множина абсцис, $\{y\}$ множина ординат, $\{z\}$ множина аплікат цих точок.

Узагальненою кривою Без'є, яка породжена послідовністю $\{A\}$, називається крива з параметричними рівняннями

$$(x(t),y(t),z(t))=(B_n(x,t,a),B_n(y,t,a),B_n(z,t,a)),0\le t\le 1.$$

Теорема 8. *Нехай $A_0(t=0)$ початкова точка кривої Без'є, а $A_{2n}(t=1)$ кінцева точка. Тоді відрізки $A_0A_1,A_{2n-1}A_{2n}$ дотикаються до кривої, відповідно, в точках A_0,A_{2n}.*

Дійсно, вектор

$$\left(\frac{d}{dt}B_n(x,t,a)\bigg|_{t=0},\frac{d}{dt}B_n(y,t,a)\bigg|_{t=0},\frac{d}{dt}B_n(z,t,a)\bigg|_{t=0}\right)$$

$$=(2n(x_1-x_0),2n(y_1-y_0),2n(z_1-z_0))$$

колінеарний до вектора $(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$, а вектор

$$\left(\frac{d}{dt}B_n(x,t,a)\Big|_{t=1}, \frac{d}{dt}B_n(y,t,a)\Big|_{t=1}, \frac{d}{dt}B_n(z,t,a)\Big|_{t=1}\right)$$
$$=(2n(x_{2n}-x_{2n-1}),2n(y_{2n}-y_{2n-1}),2n(z_{2n}-z_{2n-1}))$$

колінеарний до вектора $(x_{2n}-x_{2n-1}, y_{2n}-y_{2n-1}, z_{2n}-z_{2n-1})$.

5. Багатовимірна узагальнена генератриса Без'є

Нехай $x=(x_1,\cdots,x_m)$ точка в m–мірному просторі, $|x|=x_1+\cdots+x_m$, $k=(k_1,\cdots,k_m)$ - m-мірний індекс, $|k|=k_1+\cdots+k_m$, $k!=k_1!\cdots k_m!$, $x^k=x_1^{k_1},\cdots,x_m^{k_m}$, T_m - одиничний m–мірний симплекс.

Означення 3. *Нехай* $a\ge 0$, n - *натуральне число*, $\{y\}=\{y_k\}, 0\le|k|\le 2n$, *довільна* m - *кратна послідовність*, $x\in T_m$. *Функція*

$$B_n(y,x,a):=\sum_{0\le|k|\le 2n} y_k C(n,|k|,a)\frac{|k|!}{k!}b(|x|,a)^{|k|/2}b(1-|x|,a)^{n-|k|/2}$$

називається узагальненою m -*мірною генератрисою Без'є послідовності* $\{y\}$.

Теорема 9. *Нехай* $V(x,a)=\{v_{ij}\}$ *матриця з елементами*

$$v_{ij}=\delta_{ij}x_i - x_i x_j\frac{|x|-v(|x|,a)}{|x|^2}, i,j=1,\ldots,m.$$

Тоді

$$V(x,a)\cdot\begin{pmatrix}\partial B_n(y,x,a)/\partial x_1\\ \cdots\\ \partial B_n(y,x,a)/\partial x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_n((k_1-2nx_1)y,x,a)\\ \cdots\\ B_n((k_m-2nx_m)y,x,a)\end{pmatrix}.$$

Доведення. Введемо позначення:

$$p_k(x):=C(n,|k|,a)\frac{|k|!}{k!}\left(\frac{x}{|x|}\right)^k b(|x|,a)^{|k|/2}b(1-|x|,a)^{n-|k|/2}.$$

Тоді

$$B_n(y,x,a)=\sum_{0\le|k|\le 2n} y_k p_k(x),\ \partial B_n(y,x,a)/\partial x_j=\sum_{0\le|k|\le 2n} y_k\partial p_k(x)/\partial x_j=$$

$$=\sum_{0\le|k\le 2n|} y_k\left(\frac{k_j}{x_j}-\frac{|k|}{|x|}+\frac{|k|-2n|x|}{v(|x|,a)}\right)p_k(x), j=1,2,\ldots,m.$$

Знайдемо добуток i–го рядка матриці V на стовпець $dB_n(y,x,a)/dx, i=1,2,\ldots,m$.

Отримаємо:

$$\sum_{0\le|k|\le 2n} x_i y_k \left(\frac{k_j}{x_j}-\frac{|k|}{|x|}+\frac{|k|-2n|x|}{v(|x|,a)}\right)p_k(x)-$$

$$\sum_{0\le|k|\le 2n} y_k p_k(x)\sum_{j=1}^{m} x_i x_j \left(\frac{k_j}{x_j}-\frac{|k|}{|x|}+\frac{|k|-2n|x|}{v(|x|,a)}\right)\frac{|x|-v(|x|,a)}{|x|^2}$$

$$=\sum_{0\le|k|\le 2n} x_i y_k p_k(x)\left(\frac{k_j}{x_j}-\frac{|k|}{|x|}+\frac{|k|-2n|x|}{v(|x|,a)}\left(1-\frac{|x|-v(|x|,a)}{|x|^2}\right)\right)$$

$$=\sum_{0\le|k|\le 2n} x_i y_k p_k(x)\left(\frac{k_j}{x_j}-\frac{|k|}{|x|}+\frac{|k|-2n|x|}{v(|x|,a)}\right)=\sum_{0\le|k|\le 2n} y_k p_k(x)(k_i-2nx_i)$$

$$=B_n((k_i-2nx_i)y,x,a),$$

що і потрібно було довнсти.

Нехай на симплексі T_m задана неперервна функція $y=f(x)$. Тоді, як і в одновимірному випадку, оператори $B_n(y,x,a),\{y\}=\{f(k_1/(2n),\ldots,f(k_m/(2n)\},0\le k_1+\cdots+k_m\le 2n$, можуть служити для апроксимації функції f на симплексі T_m. Якщо a=1, то $B_n(y,x,1)=B_{2n}(y,x)$ симплеціальні поліноми Бернштейна. Через те, що оператори $B_n(y,x,a)$ задовольняють співвідношення

$$V(x,a)\cdot\frac{d}{dx}B_n(y,x,a)=2nB_n((\cdot-x)f(\cdot),x,a),$$

то вони - оператори типу $\boldsymbol{B}$. Їхні властивості вивчені в [4].

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Шенен П., Коснар М., Гардан И. и др., *Математика и САПР: кн.*1 – М.:Мир, 1988.-204.
2. Волков Ю.И., О некоторых линейных положительных операторах. – *Матем. заметки*, 1978, т.23, №5, с.659-669.
3. Sikkema P.C. and van der Meer P.J.C., The exact degree of local approximation involving the modulus of continuity. – *Proc.Kon.ned.akad.wetensch*, 1979, A82, №1, p.63-76.
4. Волков Ю.И., Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега-Стилтьеса. – *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, 1983, т.47, №3, с.435-454.